
Scienze sociali

In questo capitolo descriverò a mio modo alcuni risultati fondamentali nella teoria matematica relativa alle scienze sociali. In particolare, mi occupo di risultati che, forse non casualmente, sono stati enunciati e dimostrati a distanza veramente molto ravvicinata, negli anni 50 del secolo scorso. Hanno degli aspetti in comune e delle differenze. Cercherò di mettere in evidenza gli uni e le altre e di far capire perché a mio avviso è interessante averne un'idea, non solo per i cosiddetti specialisti. E cercherò di sfuggire alla tentazione di essere troppo tecnico e di spiegarmi il più possibile a parole: di formule in questo libro ce ne sono già abbastanza.

È chiaro che la scienza si è occupata da sempre degli aspetti delle relazioni fra individui, gruppi, nazioni, stati, ma è altrettanto vero che un approccio più matematico e “quantitativo” nell'analisi di questi problemi è storia molto recente, visto che un modo sistematico di trattare con strumenti matematici questi problemi risale alla seconda metà del secolo scorso. Spesso i primi risultati significativi che si ottengono in una disciplina nuova sono molto interessanti, prima di tutto perché sono quasi sempre abbastanza comprensibili e non troppo difficili da esporre, in quanto ancora privi di troppi sofisticati tecnicismi; secondariamente, perché influenzano in maniera profonda tutta la ricerca futura. Ho scelto di parlare di tre fra questi risultati, di cui cercherò anche di mettere in luce aspetti diversi ed analogie. Sono il teorema di impossibilità di Arrow, il modello di contrattazione di Nash e l'indice di Shapley per giochi cooperativi.

Cominciamo dal teorema di Arrow e da alcuni risultati connessi.

Il teorema di Arrow

Cominciamo col vedere il teorema di Arrow. Desidero provare ad enunciare il teorema in maniera completa, per metterne almeno uno nel libro e perché penso che sia un po' particolare, anche per persone abituate a leggere di matematica. In una prima versione del libro avevo incluso anche la dimostrazione, ma alla fine ho deciso che rappresentava un appesantimento non giustificato. Però ho il file pronto e chi vuole può chiedermelo. . . Cercherò comunque di commentare e "tradurre" in parole semplici tutte definizioni ed i simboli che introduco e chi non ha voglia di leggere le parti più matematiche dovrebbe poter seguire i ragionamenti che le accompagnano. E se proprio non volete leggere un discorso formalizzato, passate direttamente ai commenti dopo il teorema, di cui faccio un riassunto per chi non si è avventurato nella lettura del suo testo.

Proviamo a fare un esempio: supponiamo che l'assemblea dei proprietari di un condominio debba decidere sull'ordine temporale in cui effettuare quattro tipi di costosi interventi, diciamo rifare la facciata, mettere a norma l'impianto elettrico, cambiare l'ascensore, cambiare l'impianto termico. Ogni proprietario ha, naturalmente, le sue idee sull'ordine in cui effettuare gli interventi. Qual è allora l'ordine di interventi "corretto" che deve scegliere l'amministratore? Naturalmente, come in ogni modello che si rispetti, non importa tanto come risolvere il singolo problema, quanto piuttosto fornire un quadro generale entro il quale (tentare di) risolvere problemi simili a questo. Si comincia allora con il dare le prime definizioni di base, per costruire un modello adeguato ad inquadrare il problema. La prima definizione che ci interessa riguarda il concetto di preferenza; dobbiamo capire e formalizzare che cosa vuol dire che un individuo ha delle preferenze su delle alternative possibili. Capire che significa è del tutto ovvio, vediamo come scriverlo dal punto di vista matematico.

Sia allora A un insieme di alternative, che si assume siano almeno tre, altrimenti il discorso si banalizza; nell'esempio precedente A rappresenta i diversi tipi di lavoro che sono all'ordine