Untersuchungen über das logische Schließen*). I.

Von

Gerhard Gentzen in Göttingen.

Übersicht.

Die folgenden Untersuchungen beziehen sich auf den Bereich der Prädikatenlogik [bei H.-A.[1]) „engerer Funktionenkalkül" genannt]. Diese umfaßt solche Schlüsse, die in allen Teilen der Mathematik immerzu gebraucht werden. Was noch zu ihnen hinzukommt, sind Axiome und Schlußweisen, die man den einzelnen Zweigen der Mathematik selbst zurechnen kann, z. B. in der elementaren Zahlentheorie die Axiome der natürlichen Zahlen, der Addition, Multiplikation und Potenzierung, sowie der Schluß der vollständigen Induktion; in der Geometrie die geometrischen Axiome.

Neben der klassischen Logik werde ich ferner die intuitionistische Logik behandeln, wie sie z. B. von Heyting[2]) formalisiert worden ist.

Die vorliegenden Untersuchungen über die klassische und intuitionistische Prädikatenlogik zerfallen im wesentlichen in zwei nur lose zusammenhängende Teile.

1. Mein erster Gesichtspunkt war folgender: Die Formalisierung des logischen Schließens, wie sie insbesondere durch Frege, Russell und Hilbert entwickelt worden ist, entfernt sich ziemlich weit von der Art des Schließens, wie sie in Wirklichkeit bei mathematischen Beweisen geübt wird. Dafür werden beträchtliche formale Vorteile erzielt. Ich wollte nun zunächst einmal einen Formalismus aufstellen, der dem wirklichen Schließen möglichst nahe kommt. So ergab sich ein „Kalkül des natürlichen Schließens". („NJ" für die intuitionistische, „NK" für die klassische Prädikatenlogik.) Es zeigte sich dann weiter, daß der Kalkül gewisse besondere Eigenschaften hat, und zwar nimmt im Hinblick auf diese der von den Intuitionisten abgelehnte „Satz vom ausgeschlossenen Dritten" eine Sonderstellung ein.

Den Kalkül des natürlichen Schließens werde ich im II. Abschnitt der vorliegenden Abhandlung entwickeln, und einige Betrachtungen darüber anfügen.

---

*) Diese Arbeit, einschließlich des II. Teils, ist von der Math.-Nat. Fakultät der Universität Göttingen als Inaugural-Dissertation angenommen worden.

1) Hilbert-Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik. Im folgenden stets als H.-A. zitiert.

2) A. Heyting, Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik und Mathematik, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss., phys.-math. Kl. 1930. S. 42—65.

2. Eine nähere Untersuchung der besonderen Eigenschaften des natürlichen Kalküls führte mich schließlich zu einem sehr allgemeinen Satz, den ich im folgenden „Hauptsatz" nennen will.

Der Hauptsatz[3]) besagt, daß sich jeder rein logische Beweis auf eine bestimmte, übrigens keineswegs eindeutige, Normalform bringen läßt. Die wesentlichsten Eigenschaften eines solchen Normalbeweises lassen sich etwa so ausdrücken: Er macht keine Umwege. Es werden in ihm keine Begriffe eingeführt, welche nicht in seinem Endergebnis enthalten sind und daher zu dessen Gewinnung notwendig verwendet werden müssen.

Der Hauptsatz gilt sowohl für die klassische als auch für die intuitionistische Prädikatenlogik.

Um ihn in bequemer Form aussprechen und beweisen zu können, mußte ich einen besonders dafür passenden logischen Kalkül zugrunde legen. Hierzu erwies sich der natürliche Kalkül nicht als geeignet. Zwar weist er schon die für die Gültigkeit des Hauptsatzes wesentlichen Eigenschaften auf, doch nur in seiner intuitionistischen Form, während der Satz vom ausgeschlossenen Dritten, wie schon bemerkt, im Hinblick auf diese Eigenschaften eine Sonderstellung einnimmt.

Im III. Abschnitt der vorliegenden Abhandlung werde ich also einen weiteren Kalkül des logischen Schließens entwickeln, welcher alle gewünschten Eigenschaften sowohl in seiner intuitionistischen als auch in seiner klassischen Form besitzt. („LJ" für die intuitionistische, „LK" für die klassische Prädikatenlogik). An Hand dieses Kalküls wird dann der Hauptsatz ausgesprochen und bewiesen.

Der Hauptsatz gestattet mannigfache Anwendungen. Als Beispiele dafür werde ich im IV. Abschnitt ein Entscheidungsverfahren für die intuitionistische Aussagenlogik entwickeln (IV, § 1), sowie einen neuen Beweis für die Widerspruchsfreiheit der klassischen Arithmetik mit Ausschluß der vollständigen Induktion geben (IV, § 3).

Der III. und IV. Abschnitt können unabhängig vom II. Abschnitt gelesen werden.

3. Der I. Abschnitt enthält eine Festsetzung der in dieser Abhandlung verwendeten Bezeichnungsweisen.

Im V. Abschnitt beweise ich die Äquivalenz der von mir aufgestellten logischen Kalküle NJ, NK und LJ, LK mit einem den Formalismen von Russell, Hilbert und Heyting angeglichenen (und mit diesen unschwer vergleichbaren) Kalkül. („LHJ" für die intuitionistische, „LHK" für die klassische Prädikatenlogik).

---

[3]) Ein wichtiger Spezialfall des Hauptsatzes wurde bereits von Herbrand auf völlig anderem Wege bewiesen. Näheres darüber siehe IV. Abschn., § 2.