Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes.

Von

H. Brandt in Aachen.

Durch Probleme aus der Theorie der quaternären quadratischen Formen bin ich schon vor längerer Zeit auf eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes geführt worden[1]), die auch auf anderen Gebieten von Bedeutung sein dürfte — erscheint sie doch überhaupt als eine naturgemäße und sogar notwendige Ergänzung zur gewöhnlichen Gruppentheorie —, weshalb ich mir erlaube, diese Begriffsbildungen im folgenden zu entwickeln. Dabei wird von den Untersuchungen aus der Zahlentheorie der quadratischen Formen, die dazu die Veranlassung gaben, nichts gebraucht werden, sondern alles auf einfache Postulate gegründet.

Es sei also eine endliche[2]) Menge von Elementen $A, B, C \ldots$ und zwischen ihnen ein *Verknüpfungsgesetz* (*Komposition, Multiplikation*) gegeben, das, auf gewisse geordnete Paare von Elementen A, B angewandt, ein drittes Element C liefert, auf gewisse andere geordnete Paare von Elementen A, B dagegen nicht angewandt werden kann. Im ersten Fall heißt *A mit B komponierbar*, und C heißt *das aus A und B komponierte Element* oder auch *das Produkt aus A und B* und wird durch $C = AB$ bezeichnet. Im zweiten Falle heißt *A nicht mit B komponierbar* und ein komponiertes Element oder ein Produkt AB existiert nicht. (Hier wäre die Einführung eines neuen Elementes Null als Symbol für bisher nicht existierende Produkte möglich, aber im allgemeinen doch von geringem Vorteil, weshalb wir davon absehen.)

---

[1]) Vgl. hierzu „Der Kompositionsbegriff bei den quaternären quadratischen Formen", Math. Ann. **91** (1924), S. 313, sowie einen Vortrag auf der Tagung der Schweizer Naturforschenden Gesellschaft am 2. Oktober 1924, Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft 1924, II. Teil, S. 102 oder L'Enseignement mathématique 24 (1925), S. 130.

[2]) Die meisten Sätze gelten auch für abzählbar unendlich viele Elemente.

Eine solche Menge miteinander verknüpfter Elemente soll *Gruppoid* heißen, wenn die folgenden vier Postulate erfüllt sind.

I. *Wenn zwischen drei Elementen* A, B, C *eine Beziehung* $AB = C$ *besteht, so ist jedes der drei Elemente* A, B, C *durch die beiden andern eindeutig bestimmt.*

II. *Wenn* AB *und* BC *existiert, so existiert auch* $(AB)C$ *und* $A(BC)$, *wenn* AB *und* $(AB)C$ *existiert, so existiert auch* BC *und* $A(BC)$, *wenn* BC *und* $A(BC)$ *existiert, so existiert auch* AB *und* $(AB)C$, *und jedesmal ist* $(AB)C = A(BC)$, *so daß dafür auch* ABC *geschrieben werden kann.*

Aus diesen *Assoziationsgesetzen* schließt man leicht, daß bei Produkten aus beliebig vielen Elementen sowohl Existenz wie Wert allein durch die Reihenfolge der Elemente bestimmt sind, so daß keine Klammern gesetzt zu werden brauchen.

III. *Für irgendein Element* A *existieren stets die folgenden eindeutig bestimmten Elemente, die Rechtseinheit* E, *die Linkseinheit* E' *und das inverse Element* $\bar{A}$, *derart, daß die Beziehungen bestehen:* $AE = A$, $E'A = A$, $\bar{A}A = E$.

Wegen II kommen dazu noch die weiteren $A\bar{A} = E'$, $E\bar{A} = \bar{A}$, $\bar{A}E' = \bar{A}$ sowie $EE = E$ und $E'E' = E'$. Demnach ist A das inverse Element von $\bar{A}$, so daß man auch von *zwei zueinander inversen Elementen* sprechen kann, und Rechtseinheit und Linkseinheit vertauschen sich beim Übergang zum inversen Element.

Die Gleichung $EE = E$ ist offenbar für die Einheiten charakteristisch. In Verbindung mit II und I zeigt sie, daß jede Einheit E Rechtseinheit ist für alle Elemente A, für die AE, und Linkseinheit für alle Elemente B, für die EB existiert.

Die Anzahl r der verschiedenen Einheiten des Gruppoids wird als *Rang* bezeichnet. Gruppoide vom Rang 1 sind offenbar Gruppen.

Die Einheiten gestatten die Bedingungen der Komponierbarkeit sehr einfach zu formulieren:

Zwei Elemente A, B *sind in dieser Reihenfolge dann und nur dann komponierbar, wenn die Rechtseinheit von* A *mit der Linkseinheit von* B *identisch ist.*

Die Existenz des inversen Elementes ergibt: Wenn für drei Elemente A, B, C eine Gleichung $AB = C$ besteht, so gilt gleichzeitig $\bar{A}C = B$, $C\bar{B} = A$, $\bar{B}\bar{A} = \bar{C}$, $\bar{C}A = \bar{B}$, $B\bar{C} = \bar{A}$. Demnach darf das inverse Element $\bar{A}$ auch durch A^{-1} bezeichnet werden, und die Produkte AA^{-1} oder $A^{-1}A$ sind nur da zu berücksichtigen, wo sie für sich allein stehen,