Grauert, H.
Math. Annalen, Bd. 135, S. 263—273 (1958)

Analytische Faserungen über holomorph-vollständigen Räumen*)

Von
Hans Grauert in Münster (Westf.)

Einleitung

Die Faserbündel tauchten in der mathematischen Literatur zum ersten Male vor etwa 20 Jahren auf. Ihre erste hinreichend allgemein gehaltene Definition wurde von H. Whitney gegeben. In dem darauf folgenden Jahrzehnt hat dieser neu eingeführte Begriff zu immer neuen Untersuchungen Anlaß gegeben. Die dadurch gewonnenen Methoden sind heute aus der Topologie nicht mehr fortzudenken.

Da enge Beziehungen zwischen der Topologie und der komplexen Analysis bestehen, liegt der Gedanke nahe, auch die Faserbündel für die Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen zu verwenden. Einen ersten Schritt tat H. Cartan [2], als er 1950 zeigte, daß sich die bekannten Cousinschen Probleme in der Sprache dieser neuen Theorie formulieren lassen. Dann hat F. Hirzebruch spezielle komplexe Geradenbündel benutzt, den Satz von Riemann-Roch auf algebraische Mannigfaltigkeiten höherer Dimension zu übertragen. Ferner sind umfangreiche Untersuchungen über den Problemkreis von Atiyah, Kodaira, Spencer, Serre, Frenkel u. a. durchgeführt worden.

Bei allen diesen Betrachtungen ging es im wesentlichen darum, analytische Eigenschaften als Folgerungen von topologischen Daten auszudrücken. So ist das II. Cousinsche Problem (vgl. [17, 19]) in Holomorphiegebieten genau dann lösbar, wenn eine gewisse Kohomologiebedingung erfüllt ist. Die Anzahl der im Satz von Riemann-Roch zu einem vorgegebenen Divisor gehörenden, linear unabhängigen meromorphen Funktionen wird mit einer algebraischen Kombination von Chernschen Klassen in Beziehung gesetzt. In dieser Arbeit wird gezeigt, *daß die sog. analytischen Faserbündel schon durch ihre topologischen Eigenschaften bestimmt sind*, wenn ihre Basis ein nicht-kompakter, für die Funktionentheorie sinnvoller, komplexer Raum ist (vgl. die Sätze I und II in § 2.4)[1]).

*) Bei der vorliegenden Arbeit handelt es sich im wesentlichen um den 3. Teil der Habilitationsschrift des Verf. (vgl. [10, 11, 12]). — Die eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

[1]) Das heißt, es wird vorausgesetzt, daß die Basis ein holomorph-vollständiger Raum ist. Diese Räume, die eine echte Teilklasse K der komplexen Räume bilden, sind als die richtigen Verallgemeinerungen der nicht-kompakten Riemannschen Flächen anzusehen. Die Holomorphiegebiete des C^n und die viel untersuchten „variétés de Stein" (zur Def. vgl. [3], p. 49) gehören zu K. Die Sätze I und II wurden schon 1953 von F. Frenkel hergeleitet für den Sonderfall, daß die Faserbündel auflösbare Strukturgruppen haben (vgl. [6, 7]).

Das hat zur Folge, daß die Theorie der topologischen Faserbündel auf die analytischen Faserbündel anwendbar wird. Es ergibt sich eine Anzahl von Aussagen, von der in § 3 eine Auswahl zusammengestellt ist, u. a. folgt, daß jedes analytische Faserbündel $\mathfrak{R}$ über einem holomorph-vollständigen Raum $\mathfrak{B}$ stets dann analytisch trivial ist, wenn $\mathfrak{B}$ stetig in sich auf einen Punkt zusammenziehbar ist (Satz 6). Ist $\mathfrak{B}$ eine nicht-kompakte Riemannsche Fläche, so ist jedes analytische Faserbündel über $\mathfrak{B}$ analytisch trivial, das eine zusammenhängende Strukturgruppe L hat (Satz 7). Ferner werden Aussagen über die Möglichkeit bewiesen, die Strukturgruppen von Faserbündeln $\mathfrak{R}$ auf Untergruppen zu beschränken (Sätze 4 und 5). Alle diese Aussagen können in der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen erfolgreich verwendet werden (vgl. die Untersuchungen von H. RÖHRL [16] über das Riemann-Hilbertsche Problem, die Untersuchungen von H. HOLMANN [14] über Abbildungstheorie und die Sätze in § 4).

Es sei noch eine kurze Übersicht über den Inhalt der einzelnen Paragraphen der vorliegenden Arbeit gegeben: Im § 1 werden die Begriffe der komplexen Lieschen Gruppe, des analytischen Faserbündels, der Äquivalenz von Faserbündeln usw. definiert. Der § 2 bringt sodann den Zusammenhang mit der Garbentheorie. Es werden hier auch die Hauptresultate angegeben und hergeleitet. Die Paragraphen 3 und 4 befassen sich schließlich, wie schon gesagt, mit den Folgerungen, die sich aus der Anwendung von Sätzen der Theorie der topologischen Faserbündel ergeben.

§ 1. Faserbündel

1. Es sei in diesem Paragraphen eine kurze Übersicht über einige Definitionen und Sätze gegeben. Unter einer *komplexen Lieschen Gruppe* L^m versteht man eine (nicht notwendig zusammenhängende) *m-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit*, die noch zusätzlich folgende Eigenschaften hat:

1) *Zwischen den Punkten* $l \in L^m$ *ist eine Gruppenoperation* $\circ$ *definiert.*

2) *Bezeichnet* l^{-1} *das Inverse der Punkte* $l \in L^m$, *so ist* $(l_1, l_2) \to l_1 \circ l_2^{-1}$ *eine holomorphe Abbildung von* $L^m \times L^m$ *auf* L^m.

Die Punkte einer komplexen Lieschen Gruppe können gleichzeitig holomorphe Automorphismen eines *komplexen Raumes*[2]) sein. Wir sagen:

Eine komplexe Liesche Gruppe L^m *wirkt in einem komplexen Raum* $\mathfrak{F}$ *holomorph, wenn:*

1) *ein Gruppenautomorphismus* ω *der Gruppe* L^m *in die Gruppe* G *der holomorphen Automorphismen von* $\mathfrak{F}$ *definiert ist,*

2) *die Abbildung der Paare* $(l, x) \to \omega(l) \,\square\, x : L^m \times \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$ *holomorph ist.*

Dabei bezeichnet $\square$ die Anwendung des Automorphismus $\omega(l)$ auf x. Wir werden in Zukunft statt $\omega(l)$ einfach l setzen. Wenn ω ein Monomorphismus von L^m in G ist, so sagen wir, daß L^m in $\mathfrak{F}$ effektiv wirkt.

[2]) Komplexe Räume in dieser Arbeit seien stets C-Räume (vgl. [8, 9 und 11]). C-Räume heißen nach H. CARTAN „normale komplexe Räume" (vgl. [4], p. 96). Die Resultate sind jedoch für beliebige komplexe Räume im Sinne von CARTAN-SERRE gültig (vgl. [5]).