Bemerkung zur Hardy-Littlewoodschen Lösung des Waringschen Problems.

Von

Alexander Ostrowski in Göttingen.

In der Abhandlung der Herren Hardy und Littlewood: *Some Problems of „Partitio numerorum"; II: Proof that every large number is the sum of at most* 21 *biquadrates*[1]), wird der folgende Satz bewiesen:

Es sei allgemein für ganze positive k, s durch $r_{k,s}(n)$ der Koeffizient von x^n in $\left(1+2\sum_{m=1}^{\infty} x^{m^k}\right)^s$ $(k>2)$ bezeichnet. Ist $C_{k,s}$ die positive nur von k, s abhängige Konstante $\dfrac{\left(2\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)^s}{\Gamma\left(\frac{s}{k}\right)}$, und bedeutet $S_{k,s}(n)$ die unendliche Reihe

$$S_{k,s}(n)=1+\sum_{q=2}^{q=\infty}\sum_{p}\left(\frac{S_{p,q}}{q}\right)^s e_q(-np), \quad 0<p<q, \quad (p,q)=1$$

$$S_{p,q}=\sum_{h=0}^{q-1} e^{\frac{2h^k p i\pi}{q}}, \quad e_q(-np)=e^{-\frac{2np\pi i}{q}},$$

die für $s>(k-2)2^{k-1}+4$ absolut und in n gleichmäßig konvergiert, so gilt für $s>(k-2)2^{k-1}+4$

$$(1) \qquad r_{k,s}(n)=C_{k,s}n^{s/k-1}S_{k,s}(n)+O(n^\lambda), \quad \lambda<\frac{s}{k}-1.$$

Um zu beweisen, daß jede hinreichend große Zahl als eine Summe von s nicht negativen k-ten Potenzen darstellbar ist, genügt es offenbar zu zeigen, daß $S_{k,s}(n)$ für hinreichend große n oberhalb einer festen positiven Schranke liegt. (Für unendlich viele ganze positive n kann offenbar

[1]) Vgl. die vorhergehende Abhandlung.

$S_{k,s}(n)$ nicht unterhalb einer festen negativen Schranke liegen, da $r_{k,s}(n)$ nicht negativ ist.)

Die Herren Hardy und Littlewood beweisen nun zunächst für jedes ganze positive k, daß $S_{k,s}(n)$ für hinreichend große s gleichmäßig in n beliebig wenig von 1 verschieden ist. — Dieses letzte Resultat ist insofern von besonderem Interesse, als es zeigt, daß $r_{k,s}(n)$ für sehr große s im wesentlichen nur von der Größe der Zahl n, nicht aber von ihren speziellen arithmetischen Eigenschaften abhängt. — In der zitierten Arbeit bringen aber die Herren Hardy und Littlewood darüber hinaus den Beweis, daß für $k=4$ bereits $S_{4,21}(n)$ oberhalb einer positiven Schranke liegt, womit sie die Darstellbarkeit jeder hinreichend großen Zahl als Summe von 21 Biquadraten erweisen. Damit ist natürlich dasselbe insbesondere für jedes $s > 21$ bewiesen. Sie formulieren aber als *Theorem B* den Satz, daß für jedes $s \geqq 21$

$$r_{4,s}(n) \sim C_{4,s}\, n^{s/4-1}\, S_{4,s}(n) \tag{2}$$

ist, und bemerken, was den Fall $s > 21$ anbetrifft: „It is not immediately obvious that, if Theorem B is true for $s=21$, it is also true for $s>21$. All our arguments are valid for $s \geqq 21$, except those of §§ 6. 3—6. 4; but the numerical discussion of these two paragraphs has, strictly, to be repeated for each value of s in question. Our own calculations refer only to the cases $s = 21,\ 31,\ 33$ in which we have, at various times, been particularly interested. No point of principle is involved, and the calculations in other cases may be left to anyone who may be sufficiently interested in the matter to make them.“

Ich möchte nun im folgenden einen kleinen Beitrag zu diesen Untersuchungen liefern, indem ich direkt ohne jede numerische Rechnung durch Überlegungen allgemeinen Charakters aus dem Theorem B für $s=21$ das Theorem B für jedes höhere s ableite. Die Überlegung ist an $k=4$ nicht gebunden. Ich werde allgemein zeigen:

Ist $s > (k-2)\,2^{k-1}+4$, so daß (1) gilt, und ist $S_{k,s}(n)$ für dieses s für hinreichend große n zwischen den positiven Schranken σ, σ' enthalten, so daß für hinreichend große n

$$r_{k,s}(n) \sim C_{k,s}\, n^{s/k-1}\, S_{k,s}(n), \quad \sigma' > S_{k,s}(n) > \sigma > 0 \tag{3}$$

gilt, so liegt $S_{k,s}(n)$ auch für jedes größere s zwischen denselben Schranken, so daß (3) dann auch für jedes größere s gilt.

Unsere Betrachtung liefert aber noch etwas mehr. Ist z. B. $k=4$, so hängt, wie die Rechnungen der Herren Hardy und Littlewood ergeben haben, der Wert von $S_{4,21}(n)$ sehr wesentlich von der Restklasse modulo 16 ab, in der n liegt. Der ausschlaggebende Faktor im Ausdruck