Bemerkungen über die Erweiterung von Homotopien

Von

Dieter Puppe

Wir geben Charakterisierungen für die (absolute) Homotopieerweiterungseigenschaft (= HEP = homotopy extension property, s. Abschnitt 3, Satz 1) und die schwache Homotopieerweiterungseigenschaft (= WHEP = weak HEP, Abschnitt 7, Satz 3) eines Raumpaares (X, A), die zum Teil — aber trotz ihrer Einfachheit anscheinend auch nur zum Teil — bekannt sind. Aus diesen Charakterisierungen folgt, daß sich die HEP von (X, A) und (Y, B) auf $(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y))$ überträgt (Abschnitt 4, Satz 2) und daß die WHEP eine Invariante des Homotopietyps von (X, A) rel. A ist (Abschnitt 7, Korollar 1). Die WHEP überträgt sich dagegen nicht auf Produkte (Abschnitt 8), und die HEP ist keine Invariante des relativen Homotopietyps (Abschnitt 5).

Ich danke Herrn R. Brown (Hull, England) für Gespräche, durch die diese Note angeregt und beeinflußt wurde.

1. Definition 1. Das Paar (X, A) von (topologischen) Räumen (A Teilraum von X) *hat die HEP, wenn gilt: Zu jedem Raum Y und jedem Paar von (stetigen) Abbildungen*

$$f : X \to Y, \quad \varphi : A \times I \to Y$$

mit $\varphi(a, 0) = f(a)$ für alle $a \in A$ gibt es eine Abbildung $\Phi : X \times I \to Y$ mit

$$\Phi(x, 0) = f(x) \qquad \text{für alle } x \in X,$$
$$\Phi(a, t) = \varphi(a, t) \qquad \text{für alle } (a, t) \in A \times I.$$

Daraus folgt unmittelbar, daß es eine Retraktion

$$r : X \times I \to (X \times 0) \cup (A \times I) \subset X \times I$$

gibt. Ist A abgeschlossen in X, so folgt umgekehrt HEP aus der Existenz von r[1]).

[1]) *Zusatz bei der Korrektur (6. 11. 1966):* Das gilt auch, wenn A nicht abgeschlossen ist, erfordert dann aber zusätzliche Überlegungen. Allgemein stimmt die Topologie von $(X \times 0) \cup \cup (A \times I)$ als Teilraum von $X \times I$ nicht mit der Identifizierungstopologie überein, die man durch Verheften von $X \times 0$ und $A \times I$ erhält. Man kann aber zeigen, daß aus der Existenz der obigen Abbildung r die Übereinstimmung folgt. Auch an einigen weiteren Stellen dieser Arbeit kann die Voraussetzung, daß A abgeschlossen ist, vermieden werden (z. B. in Satz 3 und seinen Korollaren 1 und 2). Die Sätze 1 und 2 sowie das Korollar 3 zu Satz 3 werden ohne sie aber falsch.

Ist X Hausdorffsch und existiert r, so ist A immer abgeschlossen, denn $A = \{x \mid r(x, 1) = (x, 1)\}$. Wir betrachten von jetzt an nur Raumpaare (X, A), bei denen A in X abgeschlossen ist, machen aber sonst keine Voraussetzungen; z. B. braucht X nicht Hausdorffsch zu sein.

2. Definition 2. (X, A) hat die Eigenschaft WNDR (weak neighborhood deformation retract), wenn es eine Abbildung $\psi : X \times I \to X$ und eine (stetige) Funktion $v : X \to I$ gibt, so daß

$$(*) \qquad \begin{aligned} \psi(x, 0) &= x && \text{für} \quad x \in X, \\ \psi(x, 1) &\in A && \text{für} \quad v(x) < 1, \\ \psi(a, t) &= a && \text{für} \quad (a, t) \in A \times I, \\ v(A) &= 0. \end{aligned}$$

Bemerkung. WNDR ist mit folgender scheinbar schwächeren Bedingung äquivalent: Es gibt $V \subset X$, eine Abbildung $\psi_1 : V \times I \to X$ und eine Funktion $v_1 : X \to I$, so daß die zu (*) analogen Formeln und

$$v_1(X - V) = 1$$

erfüllt sind.

Beweis. Man kann annehmen, daß V abgeschlossen ist (notfalls ersetze man es durch $v_1^{-1}\,[0, \frac{1}{2}]$ und $v_1(x)$ durch $\operatorname{Min}(2v_1(x), 1)$). Sei $v_2(x) = \operatorname{Min}(2 - 2v_1(x), 1)$. Dann definiert

$$\psi(x, t) = \begin{cases} \psi_1(x, t \cdot v_2(x)), & x \in V, \\ x, & v_1(x) = 1, \end{cases}$$

eine Abbildung $\psi : X \times I \to X$, die zusammen mit $v(x) = \operatorname{Min}(2v_1(x), 1)$ die Formeln (*) erfüllt.

3. Satz 1. *Für ein Raumpaar (X, A) (A abgeschlossen in X) sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *(X, A) hat die HEP.*

(b) *(X, A) hat die Eigenschaft WNDR, und es gibt eine (stetige) Funktion $w : X \to I$ mit $A = w^{-1}(0)$.*

(c) *Es gibt eine Funktion $u : X \to [0, \infty[$ und eine Abbildung*

$$X \times I \supset \{(x, t) \mid 0 \leqq t \leqq \operatorname{Min}(u(x), 1)\} \xrightarrow{\varphi} X,$$

so daß

$$\begin{aligned} & u(A) = 0, \\ & \varphi(x, 0) = x && \textit{für alle} \quad x \in X, \\ & \varphi(x, u(x)) \in A && \textit{für} \quad u(x) \leqq 1. \end{aligned}$$

Bemerkungen. Ist X normal, so existiert w in (b) genau dann, wenn A ein G_δ ist (Durchschnitt von abzählbar vielen offenen Mengen). In dieser Formulierung wurde die Äquivalenz (a) $\Leftrightarrow$ (b) für normales X von DOWKER in [3], 3.1 und später — anscheinend in Unkenntnis dieser Arbeit — von YOUNG in [4] bewiesen.